ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ DUY ĐẠT

MỘT SỐ DẠNG TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN XÁC SUẤT RỜI RẠC VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: **GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu**

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ DUY ĐẠT

MỘT SỐ DẠNG TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN XÁC SUẤT RỜI RẠC VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: **GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu**

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành với sự hướng dẫn tận tình của GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu - Đại học Khoa học tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội. Tự đáy lòng mình, em xin tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Thầy đối với sự quan tâm, chỉ bảo tận tình của Thầy. Em xin chân thành cảm ơn các thầy cô trong Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, đã giúp đỡ em trong suốt quá trình theo học. Tôi cũng xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu, các đồng nghiệp Trường THPT Đông Thành - Quảng Ninh và gia đình đã tạo điều kiện cho tôi hoàn thành kế hoạch học tập.

Mặc dù có nhiều cố gắng nhưng luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót và hạn chế. Tác giả mong nhận được những ý kiến đóng góp của các thầy cô và các bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2019

Tác giả

Vũ Duy Đạt

MỞ ĐẦU

Luận văn nhằm cung cấp các dạng toán xác suất rời rạc và các bài toán ứng dụng phương pháp xác suất trong giải toán trung học phổ thông. Chuyên đề nằm trong chương trình phục vụ cải cách giáo dục và bồi dưỡng học sinh giỏi ở các lớp chuyên toán phục vụ kỳ thi học sinh giỏi quốc gia, Olympic khu vực và quốc tế.

Trong chương trình cải cách giáo dục hiện nay, các vấn đề liên quan đến xác suất và thống kê đã được phê duyệt để giảng dạy chính thức trong các trường trung học phổ thông. Ở nhiều nước trên thế giới, trong các kì thi học sinh giỏi toán các cấp, Olympic Toán khu vực và quốc tế có nhiều đề toán liên quan tới lý thuyết và phương pháp xác suất, thống kê. Những dạng toán này thường được xem là thuộc loại khó vì phần kiến thức nâng cao về chuyên đề này hiện nay không nằm trong chương trình chính thống của sách giáo khoa hiện hành bậc trung học phổ thông.

Để đáp ứng nhu cầu bồi dưỡng giáo viên và bồi dưỡng học sinh giỏi về chuyên đề xác suất và phương pháp xác suất, tôi chọn đề tài luận văn "Một số dạng toán liên quan đến xác suất rời rạc và ứng dụng". Trong đó, khảo sát một số lớp bài toán từ các đề thi học sinh giỏi Quốc gia và Olympic các nước những năm gần đây về chuyên đề này.

Cấu trúc luận văn gồm 2 chương:

Chương 1. Một số dạng toán liên quan đến xác suất rời rạc.

Chương 2. Ứng dụng phương pháp xác suất trong giải toán trung học phổ thông.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2019

Tác giả

Chương 1. Một số dạng toán liên quan đến xác suất rời rạc

Trong chương này trình bày cơ sở lý thuyết cùng các bài toán áp dụng nâng cao về phép tính xác suất trong đại số, áp dụng những quy tắc tổng quát như quy tắc cộng, quy tắc nhân, công thức *Bernoulli* cho phép thử lặp, công thức xác suất đầy đủ, công thức *Bayes* vào các ví dụ thực tế. Nghiên cứu tính toán đại lượng đặc trưng biến ngẫu nhiên rời rạc như kỳ vọng, phương sai... trong thống kê. Tài liệu tham khảo chính trong phần này là các cuốn [4], [5], [6], [7].

1.1 Phép thử và biến cố

Định nghĩa 1.1. Việc thực hiện một nhóm các điều kiện cơ bản để quan sát một hiện tượng nào đó có xảy ra hay không được gọi là thực hiện một phép thử.

Ví dụ 1.1. Thực hiện tung một đồng xu bốn lần là một phép thử nhằm quan sát trong bốn lần tung đồng xu ta nhận được mặt ngửa hay mặt sấp. Khi đó tất cả các kết quả có thể xảy ra sau 4 lần tung là $2^4 = 16$. Khả năng xảy ra một trong các kết quả là $\frac{1}{16}$.

Định nghĩa 1.2 (xem [4])**.** Không gian mẫu Ω của phép thử T là tập hợp tất cả các kết quả của một phép thử T sao cho các kết quả có khả năng xảy ra như nhau. Tập $A \subset \Omega$ thì A được gọi là biến cố ngẫu nhiên. Khi $A = \Omega$ thì A được gọi là biến cố chắc chắn (chắc chắn xảy ra). Khi $A = \emptyset$ thì A được gọi là biến cố không (không xảy ra).

1.2 Xác suất của biến cố

Trở lại với ví dụ ở trên ta xét biến cố A là "kết quả bốn lần tung có ít nhất ba lần xuất hiện mặt ngửa". Kết quả của Ω làm A xuất hiện là: NNNN, NSNN, NNSN, NNNS, SNNN. Khi đó năm kết quả này được gọi là kết quả có lợi cho biến cố A, khả năng xảy ra biến cố A là $\dfrac{5}{16}$.

Định nghĩa 1.3 (xem [4])**.** Xác suất của một biến cố là một số đặc trưng cho khả năng xảy ra biến cố đó khi thực hiện một phép thử.

1.2.1 Định nghĩa cổ điển của xác suất

Định nghĩa 1.4. Xét phép thử T với không gian mẫu Ω là hữu hạn. Biến cố $A \subset \Omega$, khi đó tỉ số

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

được gọi là xác suất của biến cố A.

Nói một cách khác P là một hàm số xác định trên tập tất cả các tập con của Ω, mà tập giá trị của P là [0,1] vì $|A| \leq |\Omega|$ với mọi $A \subset \Omega$. Ta có một số tính chất của xác suất như sau:

1) $0 \leq P(A) \leq 1, \forall\ A \subset \Omega$.

2) $P(\Omega) = 1$.

3) $P(\emptyset) = 0$.

Bài toán 1.1. [xem [5]]. *Gieo đồng thời hai đồng xu cân đối đồng chất tìm xác suất để có biến cố:*

A: " Xuất hiện hai mặt sấp".

B: "Một mặt sấp, một mặt ngửa".

C: "Ít nhất một mặt sấp".

Lời giải.

Phép thử T là tung hai đồng xu cân đối đồng chất.

Không gian mẫu: $\Omega = \{SS, NN, NS, NN\}$, $|\Omega| = 4$

$A = \{SS\}, |A| = 1$

$B = \{SN, NS\}, |B| = 2$

$C = \{SS, SN, NS\}, |C| = 3$
nên $P(A) = \dfrac{1}{4} = 0,25$; $P(B) = \dfrac{2}{4} = 0,5$; $P(C) = \dfrac{3}{4} = 0,75$.

Bài toán 1.2. [xem [7] trang 447]. *Hiện nay có rất nhiều giải xổ số trao giải thưởng lớn cho những người chọn đúng một bộ sáu số trong số n số nguyên dương đầu tiên, trong đó n thường nằm trong khoảng từ 30 đến 60. Tìm xác suất mà một người chọn đúng sáu số trong số 40 số?*

Lời giải.

Chỉ có một bộ đạt giải thưởng lớn. Tổng số cách để chọn sáu số trong số 40 là

$$C_{40}^{6} = \frac{40!}{34!6!} = 3838380.$$

Do đó, khả năng chiến thắng là $\dfrac{1}{3838380} \approx 0\ .\ 00000026$.

Bài toán 1.3. *Một hộp có a quả cầu trắng, b quả cầu đen, lấy ngẫu nhiên lần lượt hai quả cầu. Tìm xác suất để biến cố sau xảy ra*

a) A : "Quả cầu thứ nhất là trắng".

b) B : "Quả cầu thứ hai là trắng biết quả cầu thứ nhất là trắng".

Lời giải.

a) Ta có số cách lấy lần lượt hai quả bóng là: $(a+b)(a+b-1)$ nên

$$|\Omega| = (a+b)(a+b-1).$$

Số cách lấy quả bóng đầu tiên là trắng, quả thứ hai là tùy ý là $a.(a+b-1)$ nên $|A| = a(a+b-1)$. Vậy

$$P(A) = \frac{a(a+b-1)}{(a+b)(a+b-1)} = \frac{a}{a+b}.$$

b) Sau khi lần đầu lấy quả trắng, số cách để lần thứ hai lấy được quả trắng là $(a-1)$ nên $|B| = a-1$. Số cách để lấy được một quả từ $a+b-1$ quả là $a+b-1$, tức $|\Omega| = a+b-1$ nên

$$P(B) = \frac{a-1}{a+b-1}$$

Bài toán 1.4. *Lấy ngẫu nhiên ra 8 con bài từ bộ tú lơ khơ 52 con. Tìm xác suất của biến cố sau*

A : "Lấy được 5 con màu đỏ".

B : "Lấy được một con cơ, hai con rô, ba con bích".

C : "Lấy được một con át, hai con J, ba con 9, hai con 2".

D : "Lấy được ba con cùng một chất đã chọn trước".

Lời giải.

Để lấy 8 con từ 52 con tú có C_{52}^{8} (cách) nên $|\Omega| = C_{52}^{8}$

Ta cần lấy 5 con đỏ, 3 con đen, nên

$$|A| = C_{26}^{3}C_{26}^{5} = 171028000.$$

Ta cần lấy 1 con cơ, 2 con rô, 3 con bích, 2 con tép, nên

$$|B| = C_{13}^{5}.C_{26}^{3}.C_{13}^{3}.C_{13}^{2} = 22620312.$$

Ta cần lấy 1 con át, hai con J, ba con 9, hai con 2, nên

$$|C| = C_{4}^{1}.C_{4}^{2}.C_{4}^{3}.C_{4}^{2} = 576.$$

Ta cần lấy ba con cùng một chất và năm con thuộc ba chất khác nên

$$|D| = 13^{3}.C_{39}^{5} = 286575757.$$

Ta có:

$$P(A) = \frac{171028000}{752538150} = 0,227268;$$
$$P(B) = \frac{22620312}{752538150} = 0,03006;$$
$$P(C) = \frac{576}{752538150} = 0,000007654;$$
$$P(D) = \frac{286575757}{752538150} = 0,2188148.$$

Bài toán 1.5. *Có n người khách ra khỏi nhà mà không lấy mũ của mình. Chủ nhà không biết rõ chủ của các chiếc mũ là ai nên gửi trả họ một cách ngẫu nhiên. Tìm xác suất để*

a) Cả n người không nhận đúng mũ của mình.

b) Cả n người được trả đúng mũ.

c) Có k người $(1 \leq k \leq n-1)$ được trả đúng mũ.

Lời giải.

Ta có:$|\Omega| = n!$

a) Gọi biến cố A : "Cả n người không nhận đúng mũ"

Khi đó:$|A| = D_n$, nên $P(A) = \dfrac{D_n}{n!}$

b) Gọi biến cố B : "Cả n người được trả đúng mũ"

Khi đó:$|B| = 1$, nên $P(B) = \dfrac{1}{n!}$.

c) Gọi biến cố C : "Có k người được trả đúng mũ"

Để có k người được trả đúng mũ thì có đúng $n-k$ người không được trả đúng mũ, nên

$$|C| = \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k D_{n-k};$$

$$P(C) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1} C_n^k D_{n-k}}{n!}.$$

1.2.2 Định nghĩa thống kê về xác suất

Định nghĩa 1.5. Tần suất xuất hiện biến cố trong n phép thử là tỷ số giữa số phép thử trong đó biến cố xuất hiện và tổng số phép thử được thực hiện.

Ta ký hiệu số phép thử là n, số lần xuất hiện biến cố A là k. Tần suất xuất hiện biến cố A là $f(A)$ thì:

$$f(A) = \frac{k}{n}$$

Định nghĩa 1.6. Xác suất xuất hiện biến cố A trong một phép thử là một số p không đổi mà tần suất f xuất hiện biến cố đó trong n phép thử sẽ dao động xung quanh p, khi số phép thử của n tăng lên vô hạn thì $P(A) \approx f(A)$.

Bài toán 1.6. *Có thể xem xác suất sinh con trai là bao nhiêu khi theo dõi 88200 trẻ sơ sinh ở một vùng có 45000 con trai.*

Lời giải.

Ta có $P(A) \approx f(A) = \dfrac{4500}{88200} = 0,51$.

Tức xác suất sinh con trai xấp xỉ 0,51. Hay tỉ lệ sinh con trai và con gái xấp xỉ là 51 nam, 50 nữ.

1.3 Định lý cộng xác suất

Theo định nghĩa của biến cố thì biến cố là tập con của không gian mẫu Ω nên trên các biến cố cũng có các phép toán tập hợp, trên cơ sở đó ta cũng xây dựng